Logique des prédicats :Exercices corrigés

Exercice 1

Formalisez dans le langage des prédicats les propositions suivantes

1. L'inspecteur Dufour a mené l'enquête.

a : L'inspecteur Dufour
Px : x a mené l'enquête.
Traduction : Pa

2. Antoine n'a pas de voiture.

a : Antoine
Px : x a une voiture.
Traduction : ¬Pa

3. La fête n'a pas fait long feu.

a : La fête
Px : x a fait long feu.
Traduction : ¬Pa

5. Le plus grand cirque du monde est en train de s'agrandir.

a : Le plus grand cirque du monde
Px : x est en train de s'agrandir.
Traduction : Pa

6. Il est malade.

a : il
Px : x est malade.
Traduction : Pa

8. Cette injustice a durablement déprimé Paul.

a : Cette injustice
Px : x a durablement déprimé Paul.
Traduction : Pa

Exercice 2

Formalisez les phrases suivantes dans le langage des prédicats, en conservant autant de structure que possible.

1. Pierre marche et Jean court.

a : Pierre
b : Jean
Mx : x marche.
Cx : x court.
Traduction : Ma ^ Cb

2. Si Pierre court, alors Pierre sera fatigué.

a : Pierre
Cx : x court.
Fx : x est fatigué.
Traduction : Ca ⇒ Fa

3. La voiture de Paul ne démarre plus.
a : La voiture de Paul
Dx : x démarre. (ou x démarre encore)
Traduction : $\neg Da$
4. Marie viendra, mais pas Jeanne.
a : Marie
b : Jeanne
V x : x viendra.
Traduction : $V\,a \wedge \neg V\,b$
5. Si François joue avec le feu, il va se faire mal.
a : François
Jx : x joue avec le feu.
Mx : x va se faire mal.
Traduction : $Ja \Rightarrow Ma$
6. Cette table semble parfaite, ou je suis mal avisé.
a : cette table
b : moi
Sx : x semble parfait.
Mx : x est mal avisé.
Traduction : $Sa \vee Mb$
7. Si le président de la République ne répond pas aux questions, alors l'éditorialiste écrira un article ravageur.
a : le président de la République
b : l'éditorialiste
Rx : x répond aux questions.
Ex : x écrira un article ravageur.
Traduction : $\neg Ra \Rightarrow Eb$
8. Si le match se termine tôt alors le métro sera plein, à moins que notre équipe gagne.
a : le match
b : le métro
c : notre équipe
Tx : x se termine tôt.
Px : x sera plein.
Gx : x gagne.
Traduction : $(Ta \Rightarrow Pb) \vee Gc$
Commentaire. « A à moins que B »équivaut à $A \vee B$.
9. Antoine ou Pierre ont un vélo.
a : Antoine
b : Pierre
V x : x a un vélo.
Traduction : $V\,a \vee V\,b$
10. Si cet homme ou son ami reviennent dans le quartier, je ferai signe.
a : cet homme

b : l’ami de cet homme
c : moi
Rx : x revient dans le quartier.
Sx : x fera signe.
Traduction : $(Ra \vee Rb) \Rightarrow Sc$

Exercice 3

Formalisez ces phrases dans le langage des prédicats.

1. Quelqu’un arrive.

Ax : x arrive
Traduction : $\exists xAx$

2. Personne n’est venu.

Vx : x est venu
Traduction : $\neg\exists xVx$

3. Quelques champignons sont comestibles.

Cx : x est un champignon
Mx : x est comestible
Traduction : $\exists x(Cx \wedge Mx)$

4. Tous les petits oiseaux volent.

Ox : x est un petit oiseau
V x : x vole
Traduction : $\forall x(Ox \Rightarrow V x)$
Commentaire. Les phrases universelles affirmatives comme celles-ci doivent être traduites par une implication ($\Rightarrow$), et non une conjonction (^). En effet, $\forall x (Ox \wedge V x)$ signifierait « Toute chose est un petit oiseau et vole ».

5. Tous les enfants aiment les bonbons.

Ex : x est un enfant
Ax : x aime les bonbons
Traduction : $\forall x (Ex \Rightarrow Ax)$

6. Aucun enfant ne déteste les bonbons.

Ex : x est un enfant
Dx : x déteste les bonbons
Traduction : $\neg\exists x(Ex \wedge Dx)$
ou : $\forall x (Ex \Rightarrow \neg Dx)$
Commentaire. Les deux traductions sont logiquement équivalentes, et je ne pense pas que l’une soit plus proche du français que l’autre (si toutefois c’est le cas, ce sera la première).
La première peut se lire : « Il est faux qu’un enfant déteste les bonbons ». La seconde : « Tous les enfants sont tels qu’ils ne détestent pas les bonbons », ou, en mauvais français, « Tous les enfants sont non-détesteurs de bonbons ».

Exercice 4

A. Traduisez les phrases suivantes dans le langage des prédicats. Conservez autant de structure que possible. Utilisez les traductions suivantes pour les prédicats :

Px : x est plombier
Hx : x est un homme
Rx : x est riche
1. Tous les plombiers sont des hommes
$\forall x\ (Px \Rightarrow Hx)$
2. Pierre est riche
a : Pierre
Ra
3. Si Pierre est un plombier, Pierre est riche
a : Pierre
$Pa \Rightarrow Ra$
4. Tous les hommes sont plombiers ou riches
$\forall x\ (Hx \Rightarrow (Px \vee Rx))$
5. Quelques plombiers sont riches
$\exists x(Px \wedge Rx)$
6. Quelques plombiers ne sont pas riches
$\exists x(Px \wedge \neg Rx)$
7. Aucun plombier n'est riche
$\neg\exists x(Px \wedge Rx)$
(On peut aussi accepter $\forall x\ (Px \Rightarrow \neg Rx)$)
8. Tous les hommes sont plombiers
$\forall x\ (Hx \Rightarrow Px)$
9. Tous les hommes ne sont pas plombiers
$\neg\forall x\ (Hx \Rightarrow Px)$
(Bien que $\exists x(Hx \wedge \neg Px)$ soit logiquement équivalent, il ne correspond pas exactement à la phrase française ; il correspondrait à « Quelques hommes ne sont pas plombiers» ou «Il y a des hommes qui ne sont pas plombiers ». La traduction ci-dessus, au contraire, conserve le quantificateur «tout » de la phrase française.)
La lecture naturelle, celle qui est formalisée comme ci-dessus, est « Il est faux que tous les hommes soient plombiers ». Mais il peut y avoir une seconde lecture (bien moins naturelle), selon laquelle la phrase signifie « tous les hommes sont non-plombiers »(soit, aucun homme n'est plombiers). La formalisation de cette seconde lecture est $\forall x\ (Hx \Rightarrow \neg Px)$.

(B) Traduisez les formules en français. Utilisez les traductions des prédicats ci-dessus, ainsi que :
Qx : x habite à Quimper
a : Antoine
b : Béatrice
c : Christine
1. Pa
Antoine est plombier.
2. Qc

Christine habite à Quimper.

3. Rb

Béatrice est riche.

4. $\exists x Qx$

Quelqu'un habite à Quimper.

5. $\forall x\ Px$

Tous sont plombiers.

6. $\forall x\ (Px \Rightarrow Qx)$

Tous les plombiers habitent à Quimper.

7. $\exists x(Qx \wedge \neg Px)$

Quelque habitant de Quimper n'est pas plombier. (Il y a un habitant de Quimper qui n'est pas plombier.)

8. $\neg\exists x Rx$

Personne n'est riche.

Exercice 5

Soit l'énoncé suivant :

1. Les personnes qui ont la grippe ne doivent pas aller au travail.
2. Les personnes qui ont de la fièvre et qui toussent ont la grippe.
3. Ceux qui ont une température supérieure à 38 ont de la fièvre.
4. Pierre tousse et a une température supérieure à 38.

Modéliser en logique des prédicats l'énoncé ci-dessus en utilisant les prédicats suivants :

- grippe(x) : x a la grippe
- travail(x) : x doit aller au travail
- fievre(x) : x a de la fièvre
- tousse(x) : x tousse
- temp(x; t) : x a la température t
- sup(x; y) : x est supérieur à y

On utilisera également les constantes suivantes :

- 38
- Pierre

Correction :

(a) $\forall x, grippe(x) \Rightarrow \neg travail(x)$

(b) $\forall x, fievre(x) \wedge tousse(x) \Rightarrow grippe(x)$

(c) $\forall x\ t, temp(x,t) \wedge sup(t,38) \Rightarrow fievre(x)$

(d) $tousse(Pierre) \wedge \exists t, (temp(Pierre,t) \wedge sup(t,38))$

(e) $\neg\neg(travail(Pierre))$

Remarque on peut aussi écrire :

$$\forall x, (\exists t, temp(x,t) \wedge sup(t,38)) \Rightarrow fievre(x)$$

On obtiendra le même résultat en effet :

$$\forall x, (\exists t, temp(x,t) \wedge sup(t,38)) \Rightarrow fievre(x) \equiv$$

$$\forall x, \neg(\exists t, temp(x,t) \wedge sup(t,38)) \vee fievre(x) \equiv$$

$$\forall x\ t, \neg temp(x,t) \vee \neg sup(t,38) \vee fievre(x)$$

Exercice 6 Variables libres et variables liées

Dans les formules suivantes :
les variables liées sont en gras ; les variables libres soulignées.

1. P$\underline{x}$
2. ∀x P**x** : x est lié par le ∀x
3. ∃yQ$\underline{x}$
4. ∃y(Q**y** ^ P**y**) : les deux occurrences de y sont liées par ∃y
5. ∀x P**x** ^ Q$\underline{x}$: la première occurrence de x est liée par ∀x (mais la seconde ne l'est pas).

Commentaire. En l'absence de parenthèse, le quantificateur ne porte que sur la sous-formule qui le suit immédiatement, comme la négation.

6. ∀x P**x** ^ Q$\underline{y}$: x est lié par ∀x
7. P$\underline{x}$ ⇒ ∃xQ**x** : la seconde occurrence de x est liée par ∃x (mais pas la première.)
8. ∃x(P**x** ⇒ Q**x**) : les deux occurrences de x sont liées par ∃x
9. ∀x ∃y(P**x** ^ Q**y**) : x est lié par ∀x, y est lié par ∀y.
10. ∀x (P**x** ⇒ ∃y(Q**y** ^ R**x**)) : les deux occurrences de x sont liées par ∀x, l'occurrence de y est liée par ∃y.

Commentaire général. Il ne fallait jamais mettre en gras (ou souligner) les x et les y qui apparaissent dans ∃x et ∃y : ce ne sont pas des variables du tout ! L'expression «∃x » forme un tout, c'est un quantificateur. Le fait qu'il y ait un x ou un y indique seulement sur quelle variable il porte.